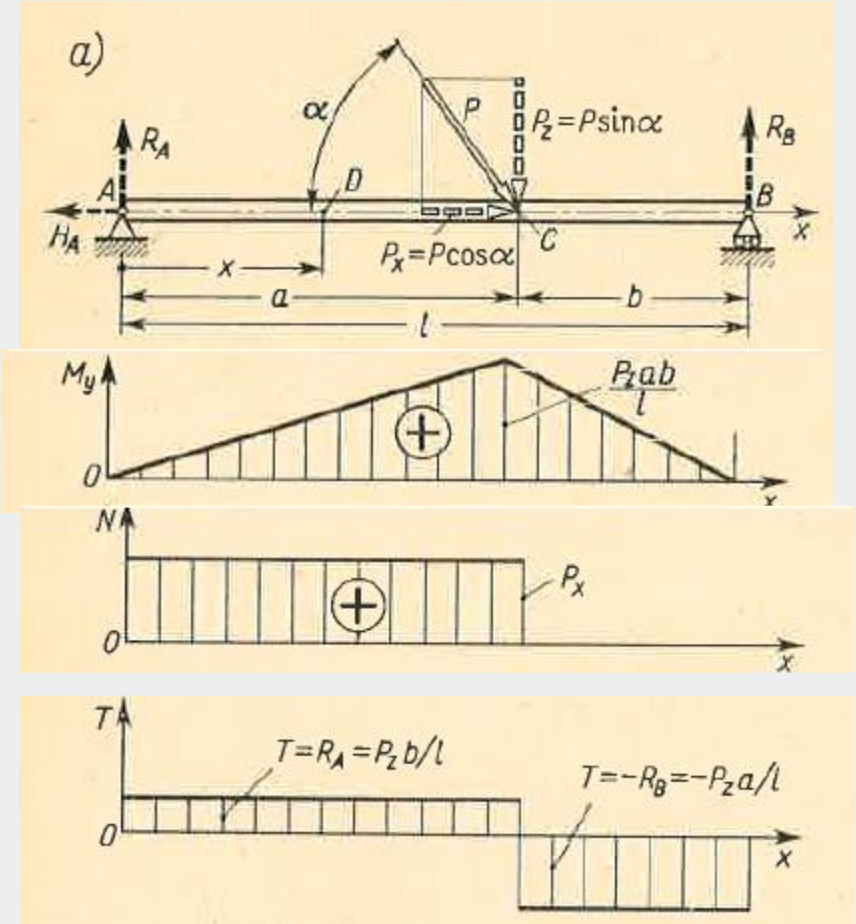
Wytrzymałość konstrukcji 1

Wykład 13

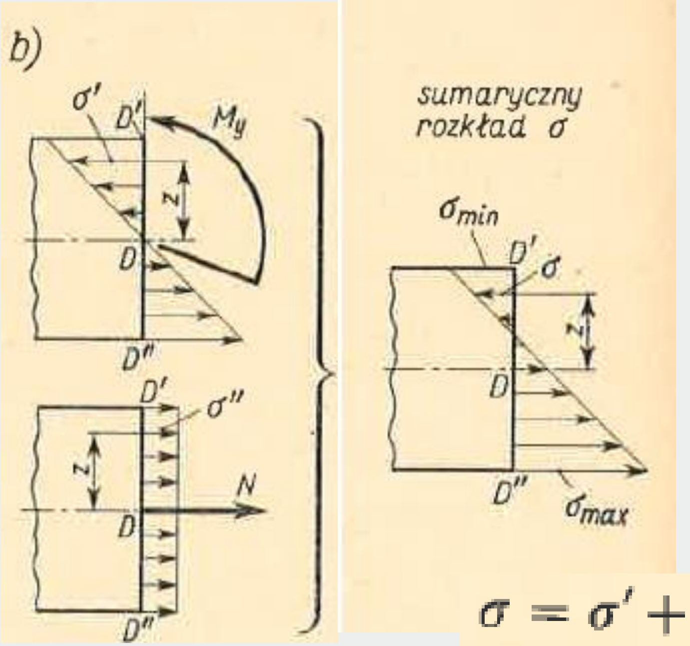
Wytrzymałość prętów krępych

Dr hab. inż. Piotr Marek

Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych



Analiza jednoczesnego zginania i rozciągania



$$\sigma' = -M_y z / J_y$$

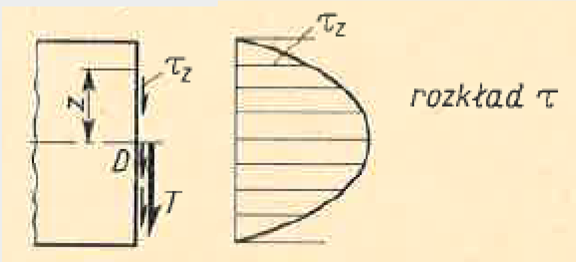
$$\sigma'' = N/A$$

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = (N/A) - (M_y z / J_y)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y'}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y''}$$

$$\tau_z = T S_y^{(z)} / J_y b_z$$



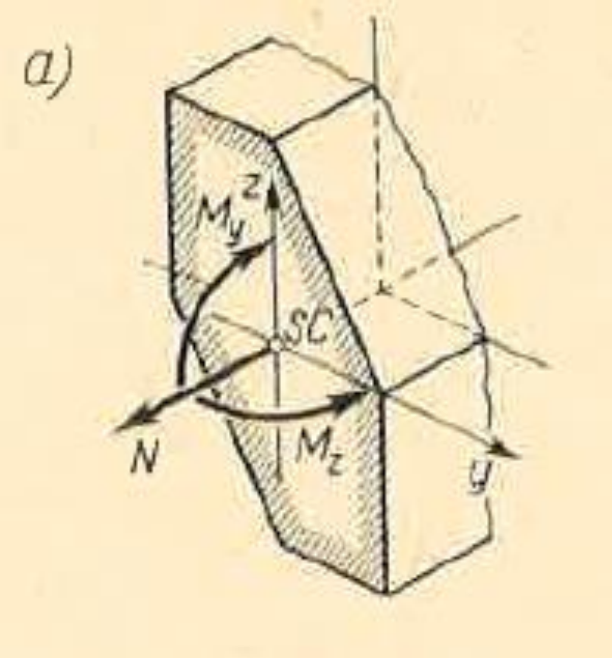
Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych

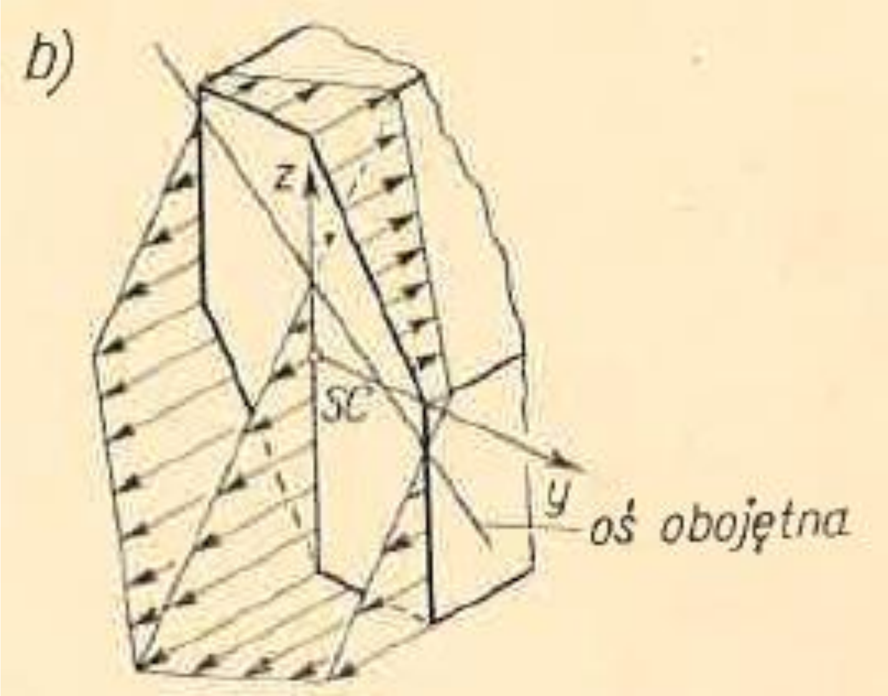
W przypadku ukośnego zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{\mathfrak{M}_y z}{J_y} - \frac{\mathfrak{M}_z y}{J_z}$$

Jednoczesne zginanie ukośne i rozciąganie

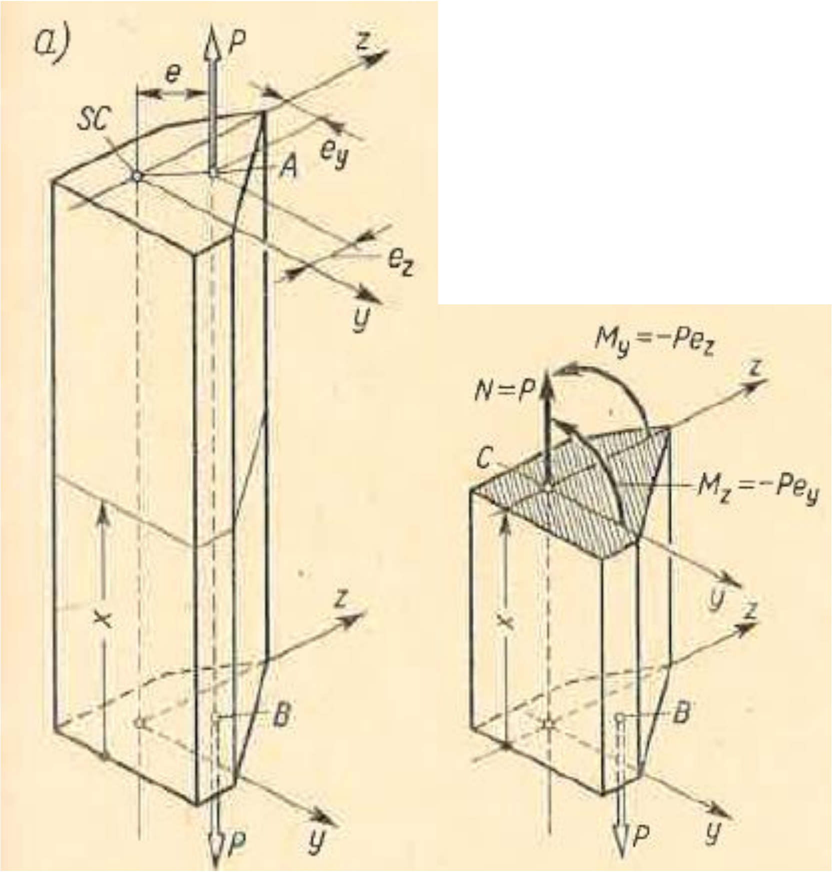




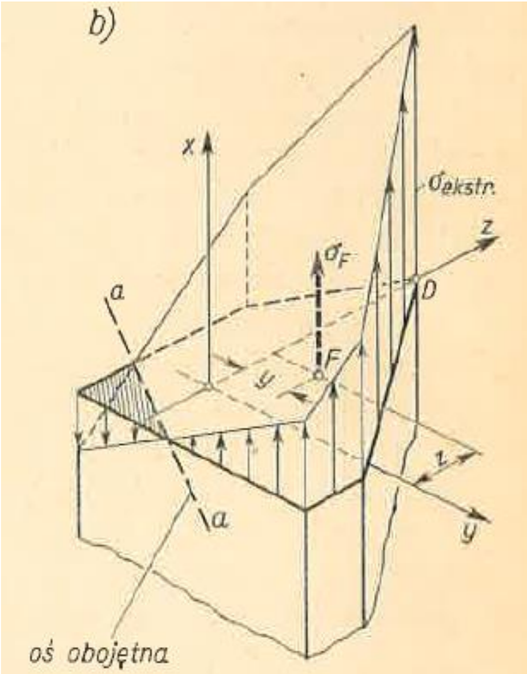
Mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie prętów

Szczególnym przypadkiem zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania jest *mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie*

Odległość e między linią działania siły a osią nazywamy *mimośrodem siły.*



Analiza mimośrodowego rozciągania



$$N = P, \qquad M_y = -Pe_z, \qquad M_z = -Pe_y,$$

$$\sigma_F = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{J_y} + \frac{Pe_y y}{J_z}$$

Aby wyznaczyć ekstremalne naprężenie σ_e:
celowe jest znaleźć naprzód oś obojętną a-a, dla której $\sigma_F = 0$,

$$(1/A)+(ze_z/J_y)+(ye_y/J_z)=0$$

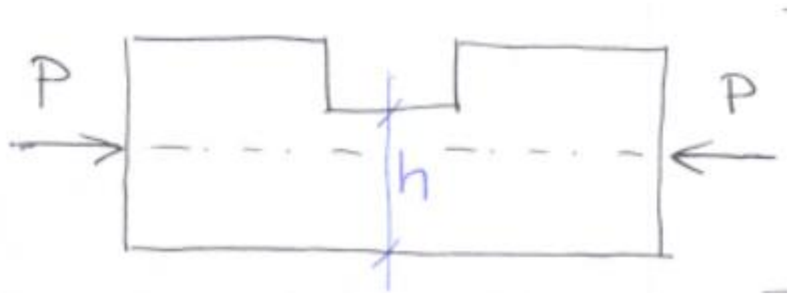
promienie bezwładności i_y, i_z

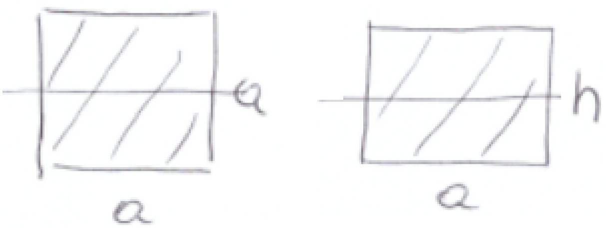
$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \qquad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}.$$

$$\frac{e_z z}{i_y^2} + \frac{e_y y}{i_z^2} + 1 = 0$$

Z zależności tej widać, że przy dostatecznie małych mimośrodach e_y i e_z oś obojętna jest przesunięta poza obręb materialnego przekroju pręta. To oznacza, że na całym przekroju działają jednoimienne naprężenia. Przypadek taki ma duże znaczenie w konstrukcjach inżynierskich, w których stosowane są materiały, jak cegła lub beton, mające małą wytrzymałość na rozciąganie i wielokrotnie większą wytrzymałość na ściskanie. W konstrukcjach takich pożądane jest, aby przy mimośrodowym ściskaniu pręta naprężenia na całym polu przekroju były ściskające. Spełnienie tego warunku jest możliwe, gdy mimośród siły nie wykracza poza pewne granice. W konstrukcjach maszynowych zagadnienie to nie ma dużego znaczenia.

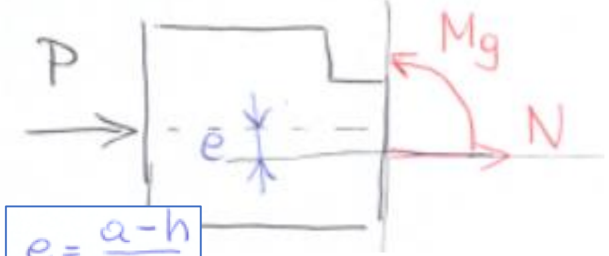
Zad. 13.1 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych





$\boxed{A = ah}$

$\boxed{J_y = \frac{a \cdot h^3}{12}}$ $\quad$ $\boxed{W_y = \frac{a h^2}{6}}$



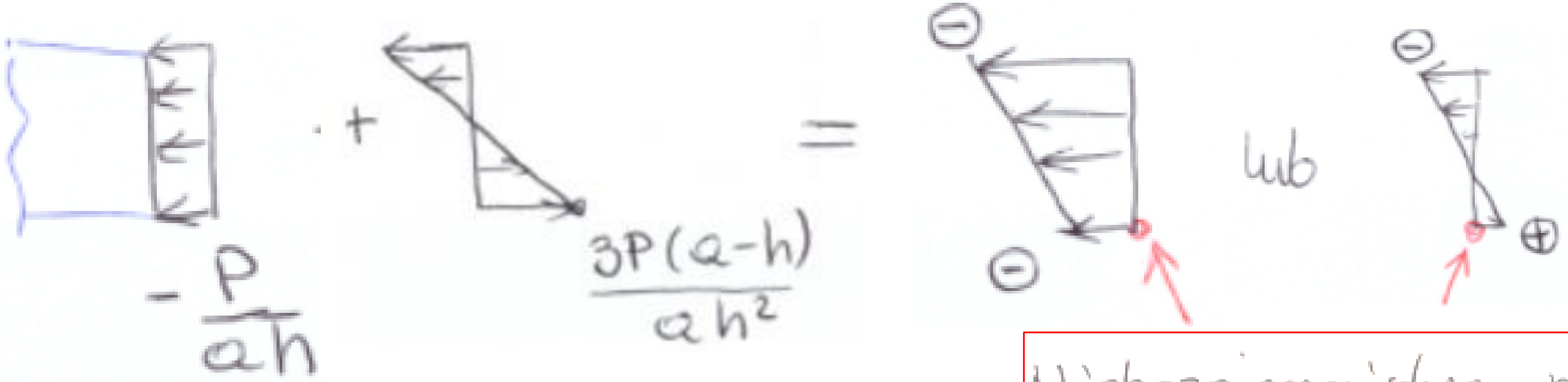
$\boxed{e = \frac{a-h}{2}}$

$N + P = 0$ $\quad$ $\boxed{N = -P}$

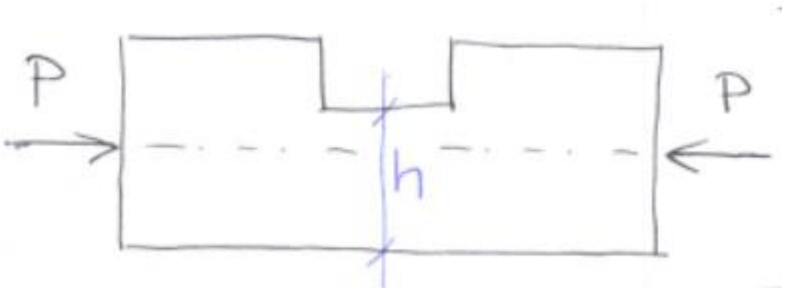
$M_g - P \cdot e = 0$ $\quad$ $\boxed{M_g = P \cdot e}$

$$\boxed{\sigma^{extr} = \frac{N}{A} \mp \frac{M}{W_y}}$$

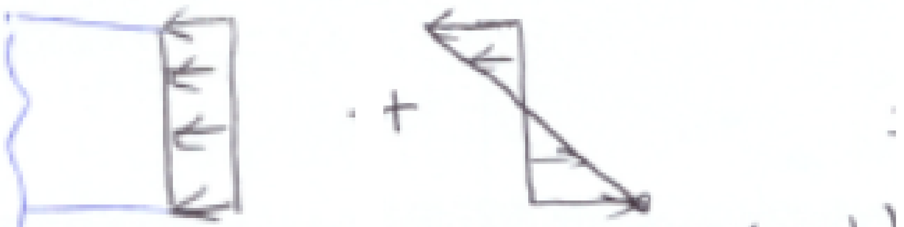
$$\sigma^{extr} = \frac{-P}{a \cdot h} \mp \frac{P \cdot e}{\frac{a h^2}{6}} = -\frac{P}{ah} \mp \frac{3P(a-h)}{a h^2}$$



Niebezpieczeństwo rozciągania $(h \downarrow)$



Jaka jest granica pocieniania $h_{min} = ?$

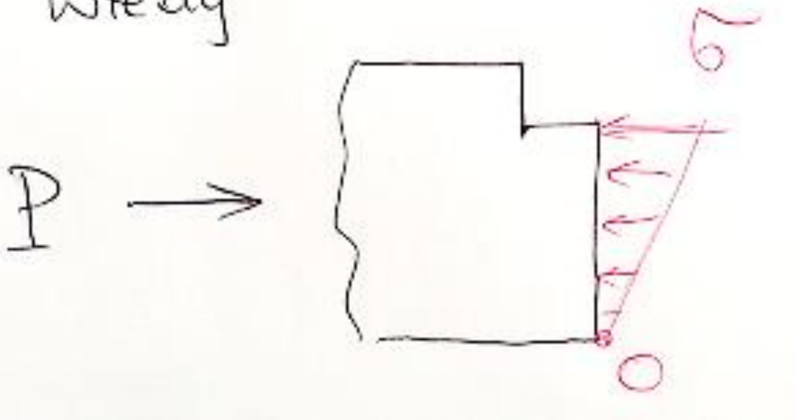


$$-\frac{P}{ah} + \frac{3P(a-h)}{ah^2}$$

wtedy $\sigma = 0$

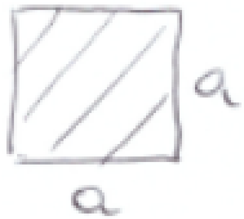
$$\boxed{-\frac{P}{ah} + \frac{3P(a-h)}{ah^2} = 0}$$

wtedy

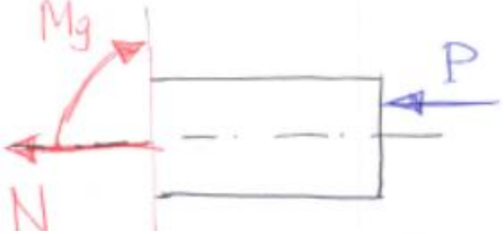


$$h = 3(a-h) \Rightarrow \boxed{h_{min} = \frac{3}{4}a}$$

Zad. 13.2 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych

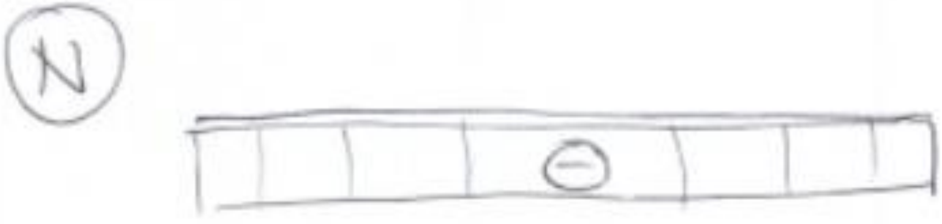


$$J_y = \frac{a^4}{12}$$



$$N = -P$$

$$M_g = P \cdot e$$

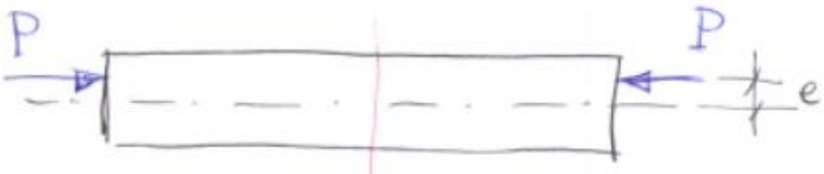


$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{-P}{a^2}$$

$$\sigma_{M_g} = -\frac{M_g}{J_y} \cdot z$$

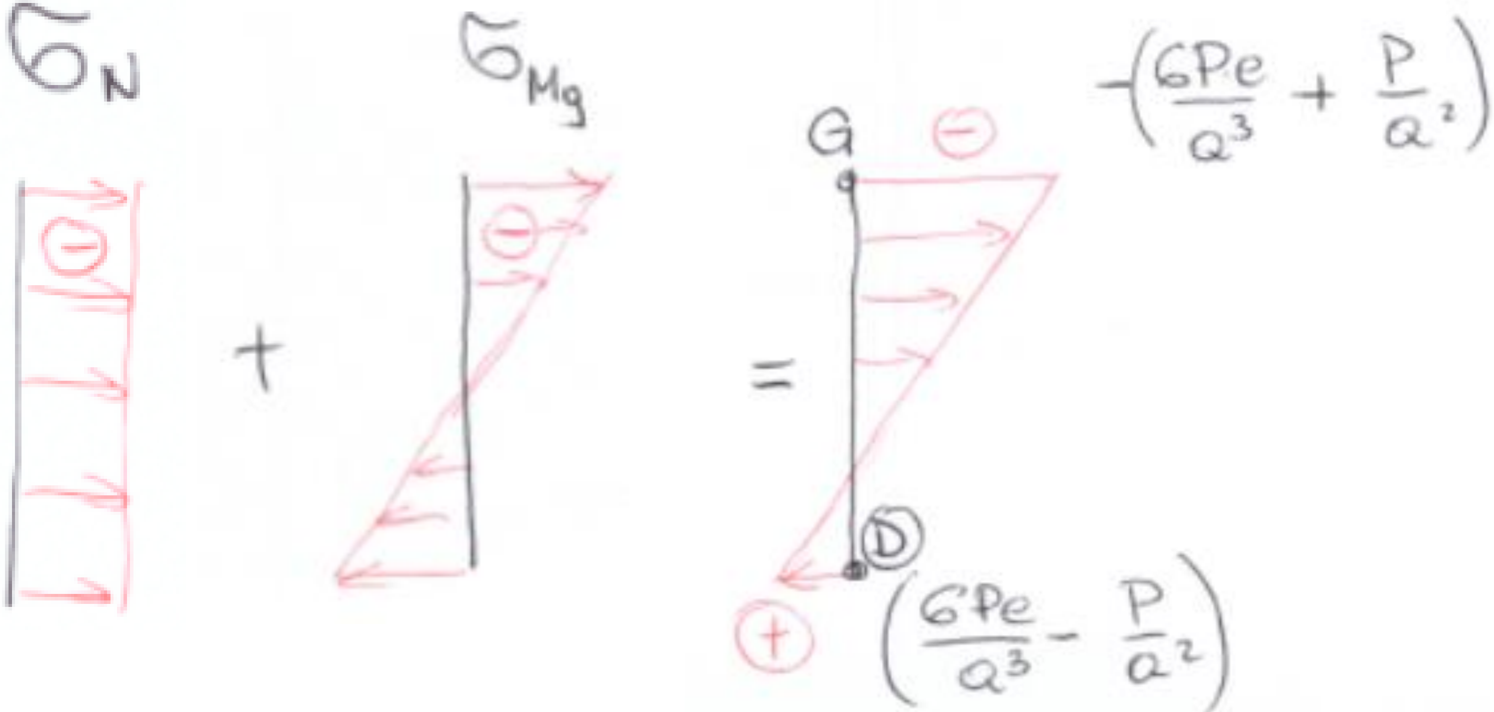
$$\pm\frac{a}{2}$$

$$\sigma_{M_g}^{extr} = -\frac{P \cdot e}{\frac{a^4}{12}} \cdot z$$



$$\sigma_N + \sigma_{Mg} = \sigma$$

$$\sigma_{Mg}^{extr} = \mp \frac{6P\cdot e}{a^3}$$

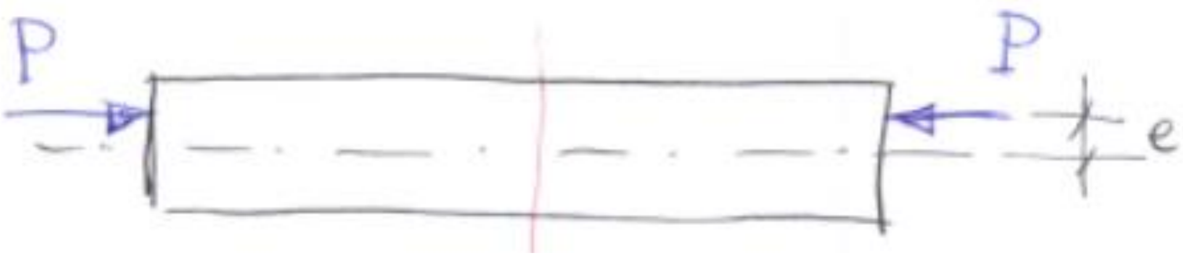


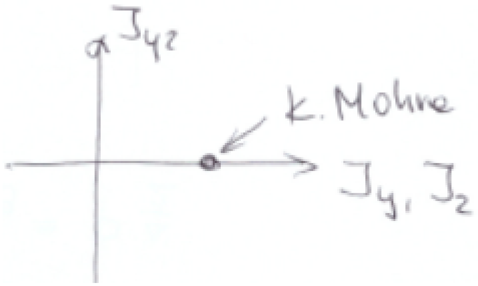
Znaleźć e_{max}, dla którego naprężenie w punkcie dolnym D osiągnie 0

$$\frac{6P\cdot e}{a^3} - \frac{P}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{P(6\cdot e - a)}{a^3} = 0$$

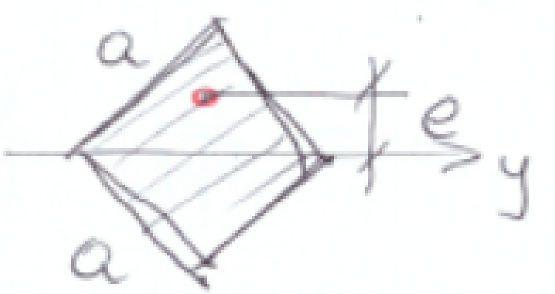
$$\boxed{e_{max} = \frac{a}{6} \approx 0{,}167a}$$

Zad. 13.3 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych (inne przekroje)





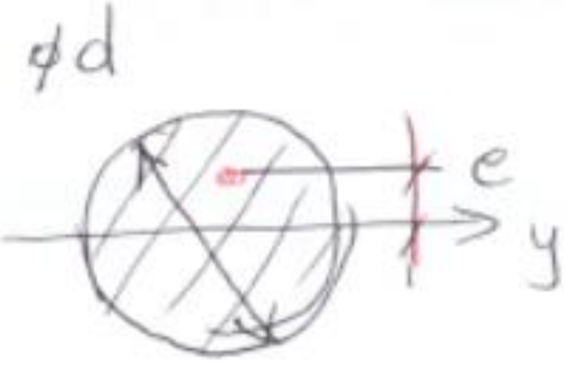
$$J_y = \frac{a^4}{12}$$



$$-\frac{P\cdot e}{a^4/12}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{6P\cdot e\sqrt{2}}{a^3}$$

$$\frac{6P\cdot e\sqrt{2}}{a^3} - \frac{P}{a^2} = 0$$

$$\boxed{e_{max} = \frac{a}{6\sqrt{2}} = 0.118a}$$



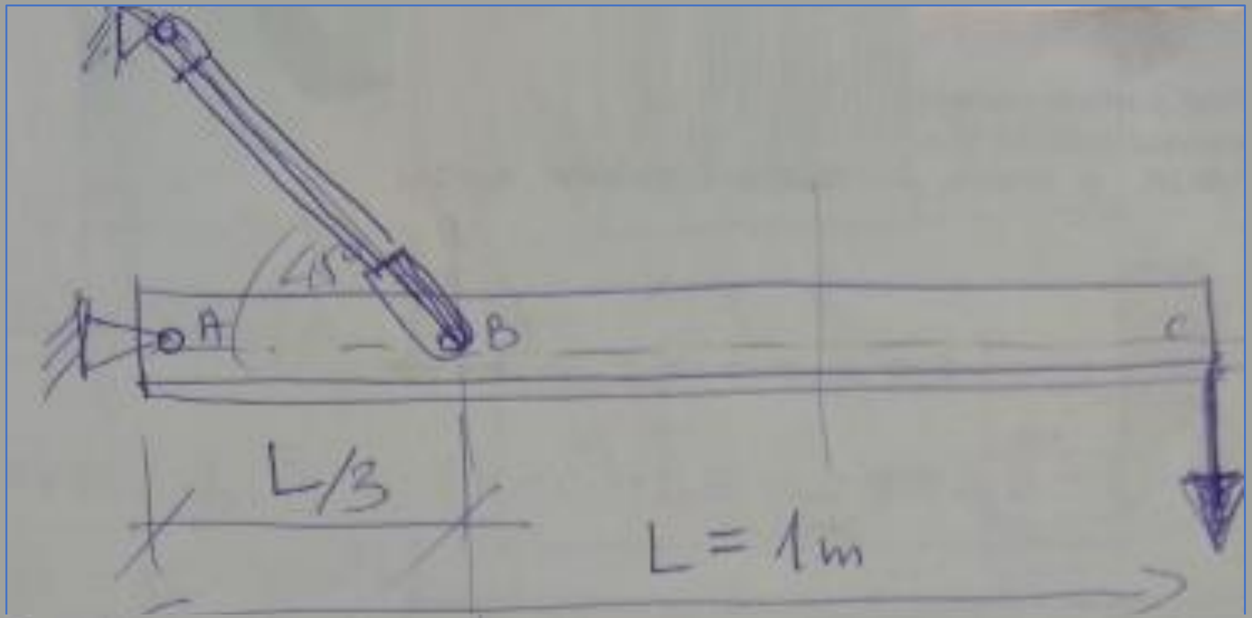
$$-\frac{P\cdot e}{\frac{\pi d^4}{64}}\cdot\frac{d}{2} = -\frac{32}{\pi}\,\frac{P\cdot e}{d^3}$$

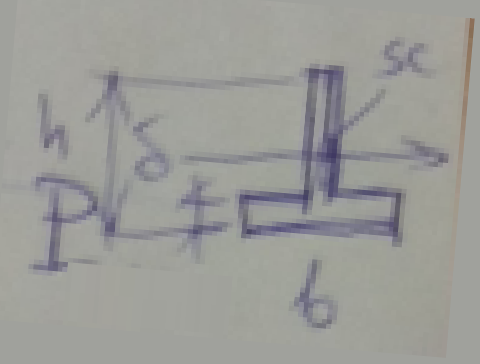
$$\frac{32}{\pi}\cdot\frac{P\cdot e}{d^3} - \frac{4P}{\pi d^2} = 0$$

$$\frac{P}{\pi d^3}\left(32e - 4d\right) = 0$$

$$\boxed{e_{max} = \frac{d}{8} = 0.125\,d}$$

Zadanie 13.4

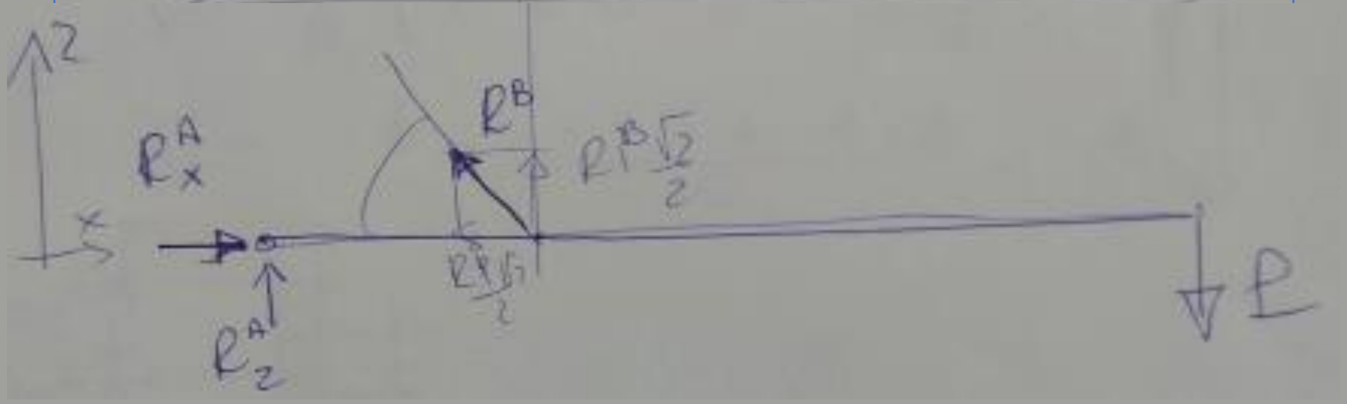




$h = 50$ mm

$b = 60$

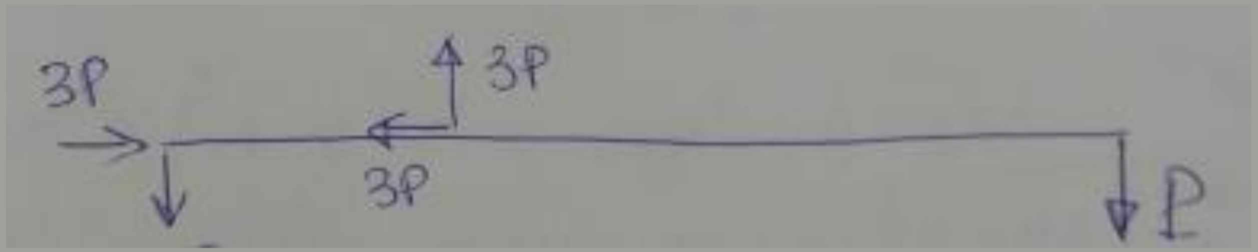
$\delta = 10$

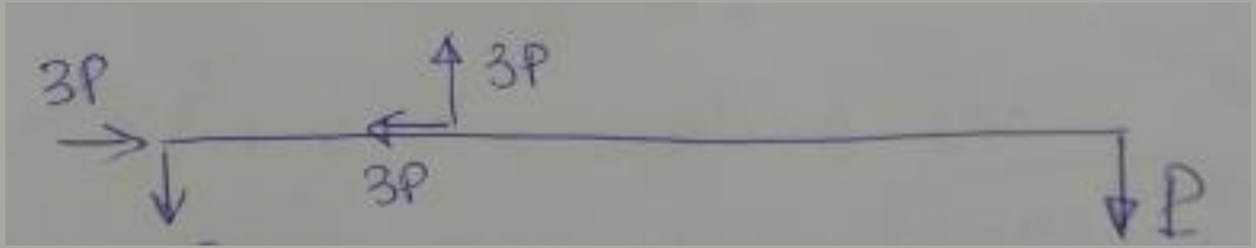


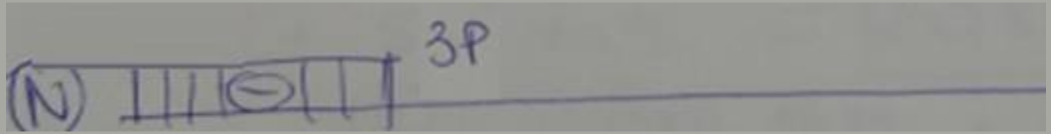
$$\Sigma M_A = 0$$

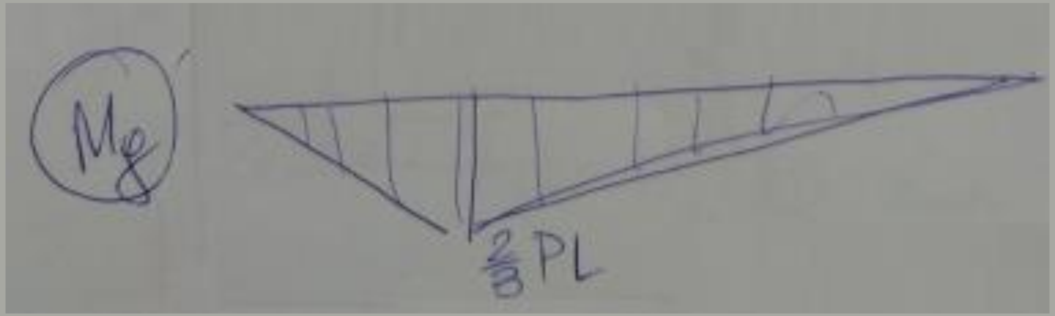
$$-P \cdot L + R^B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0$$

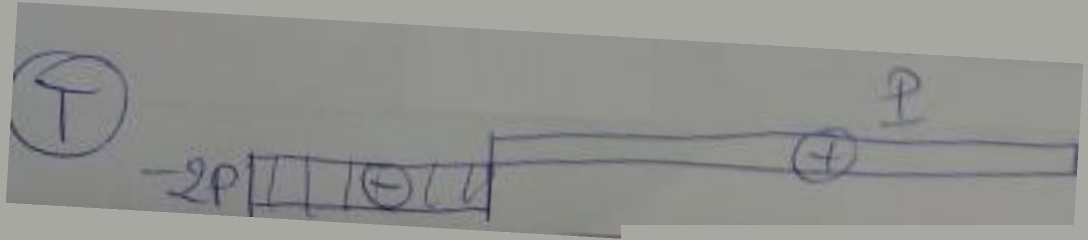
$$\boxed{R^B = 3\sqrt{2}\,P}$$

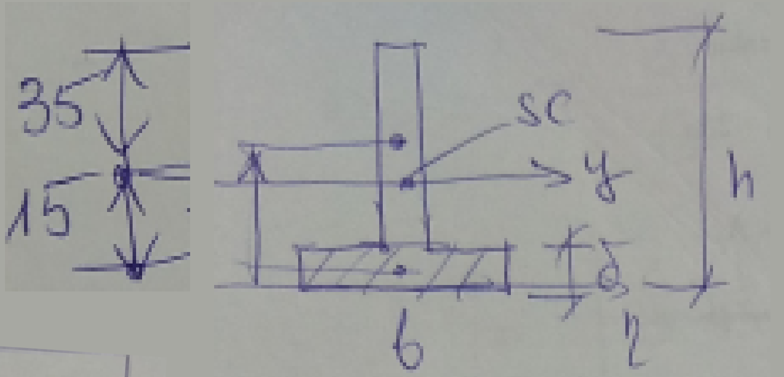












$$\boxed{\zeta_c = \frac{1}{A}\int_A \zeta\, dA}$$

$$A = \underbrace{b\cdot\delta}_{A_1} + \underbrace{(h-\delta)\cdot\delta}_{A_2} = 6\cdot 1 + (5-1)\cdot 1 = 6+4$$

$$\boxed{A = 10\ cm^2}$$

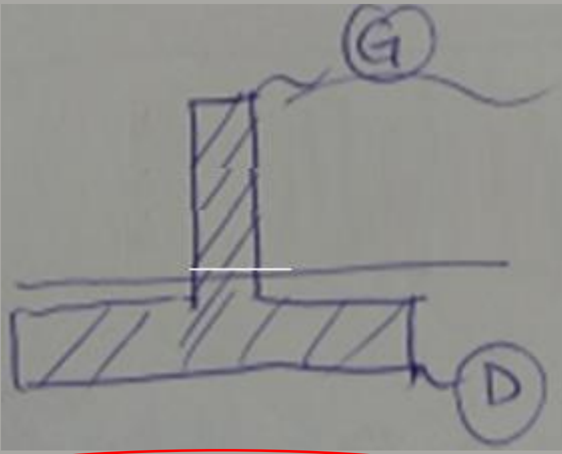
$$\zeta_c = \frac{1}{A}\left(b\cdot\delta\cdot\frac{\delta}{2} + (h-\delta)\cdot\delta\,\frac{h+\delta}{2}\right)$$

$$\zeta_c = \frac{6\cdot 0{,}5 + 4\cdot 3}{10} = \frac{3+12}{10} = 1{,}5\ cm$$

$$J_y = \frac{6\cdot 1^3}{12} + 6\cdot 1^2 + \frac{1\cdot 4^3}{12} + 4\cdot 1{,}5^2$$

$$J_y = 0{,}5+6+5{,}3+9 = \boxed{20{,}83\ cm^4}$$

$$\sigma_N = -\frac{3P}{A}$$



$$\sigma^{G}_{M_f} = \frac{\frac{2}{3}Pl}{J_y}\cdot z_{max}$$

$$\sigma^{D}_{M_f} \; \frac{\frac{2}{3}Pl}{J_y}\cdot z_{min}$$

$$|\sigma^{G}| = \left|\frac{2}{3}\frac{Pl}{J_y} z_{max} - \frac{3P}{A}\right| \le k_r$$

G $$P \le \frac{k_r}{\frac{2}{3}\frac{l\,z_{max}}{J_y} - \frac{3}{A}} = \frac{100\cdot10^{6}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1\cdot0.035}{20.83\cdot10^{-8}} - \frac{3}{10\cdot10^{-4}}}$$

$$\boxed{P \le 917\ N}$$

$$|\sigma^{D}| = \left|-\frac{2}{3}\frac{Pl}{J_y}\cdot z_{min} - \frac{3P}{A}\right| \le k_r$$

D $$P \le \frac{k_r}{\frac{2}{3}\frac{l\,z_{min}}{J_y} + \frac{3}{A}} = \frac{100\cdot10^{6}}{\frac{2}{3}\frac{1\cdot0.015}{20.83\cdot10^{-8}} + \frac{3}{10\cdot10^{-4}}}$$

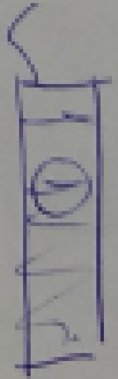
$$\boxed{P \le 1960\ N}$$

$$P_{max} = 917\ N$$

$$+\frac{\frac{2}{3}\cdot 917\cdot 1}{20{,}83}\cdot 3{,}5 = \boxed{102{,}7\ MPa}$$

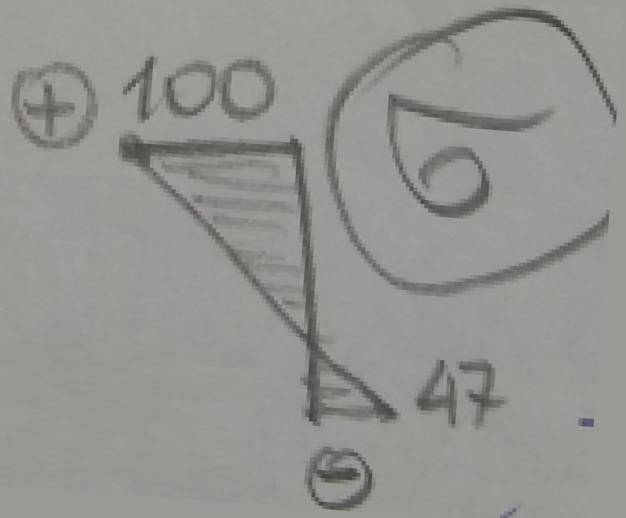
$$+\frac{\frac{2}{3}\cdot 917\cdot 1}{20{,}83\ cm^4}\cdot(-1{,}5) = \boxed{-44\ MPa}$$

$+$



$$\frac{-3\cdot 917}{1000}$$

$-2{,}7\ M$

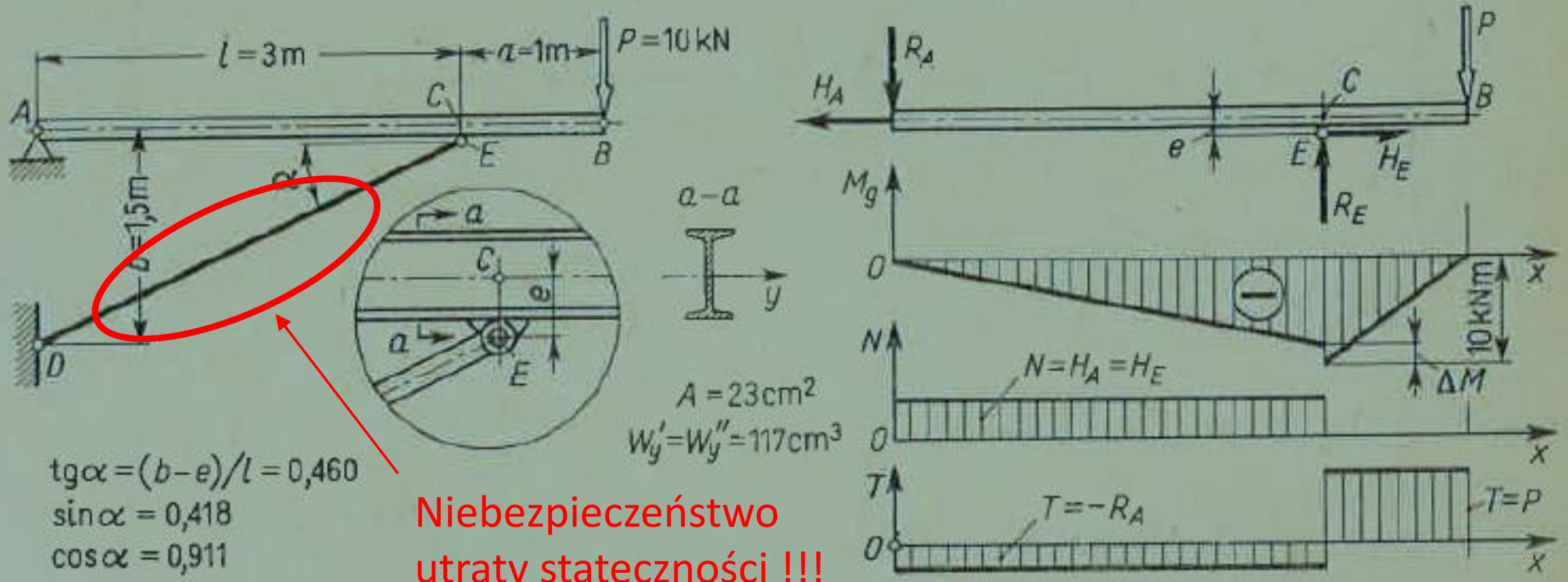


$$\tau_{max} = \frac{917}{400} < 2\ MPa$$

$$\tau_{ar} = \frac{917}{1000} = 1\ MPa$$

Zadanie 13.5 (z książki prof. Brzoski)

2. Nieważka dwuteowa belka ACB (rys. 6.12) podparta jest prętem DE, przy czym przegub E jest umocowany na belce mimośrodowo ($e = 12$ cm). Wyznaczyć σ_e w niebezpiecznym przekroju belki.



Niebezpieczeństwo utraty stateczności !!!

Rys. 6.12. Przykład liczbowy

Rozwiązanie. Istotne w tym zadaniu jest zbadanie roli mimośrodu e. Z warunku równowagi momentów względem A mamy ściskającą siłę w pręcie DE: $N' = P(l+a)/b\cos\alpha = 29{,}4$ kN. Na belkę w punkcie E działają składowe $R_E = N'\sin\alpha = 12{,}3$ kN i $H_E = N'\cos\alpha = 26{,}7$ kN. Wykres M_g ma w punkcie C przeskok ΔM, albowiem dla przekroju tuż na prawo od punktu C jest $M_g = Pa = 10$ kN m, natomiast w przekroju tuż na lewo od tego punktu jest $M'_g = Pa - H_E e = 6{,}8$ kN m. Badając σ_e w pierwszym przypadku mamy $\sigma_e = 10\cdot10^3/117\cdot10^{-6} = 85$ MPa, natomiast w przekroju drugim $\sigma_e = (H_E/A)+[(Pa-H_E e)/W_y] \approx 70$ MPa. Niebezpieczny jest więc przekrój tuż z prawej strony C.